NTNU Norwegian University of Science and Technology>
Faculty of Information Technology, Mathematics and
Electrical Engineering>
Department of Mathematical Sciences.

Home Project in Advanced Real Analysis

A Proof of the Tietze Extension Theorem

by

Jan Wigestrand

English version 1.00

Trondheim, April 29, 2008.

The Tietze Extension Theorem.
Let X be a normal space. If A is a closed subset of X and $f \in C(A, [a, b])$, there exists $F \in C(X, [a, b])$ such that $F|A = f$.

See [Folland,p122].

Proof. Since f is continuous on a closed interval $[a, b]$ we can without loss of generality replace $[a, b]$ by $[0, 1]$ (replace f by $(f - a)/(b - a)$, $f = 0 \leftrightarrow f = a$, $f = 1 \leftrightarrow f = b$).
We will show that we can find F by using a sequence of continuous functions.
By Urysohn's lemma there exists continuous functions
$g_n \in C\left(X, \left[0, \frac{2^{n-1}}{3^n}\right]\right)$ where $g_n(B_n) = 0$, $g_n(C_n) = \frac{2^{n-1}}{3^n}$, $B_n \cap C_n = \emptyset$ and B_n, C_n are closed subsets of A.
Choose $B_1, \ldots, B_n, C_1, \ldots, C_n$ in the following way $B_1 = \left\{x \in A \mid f \le \frac{1}{3}\right\}$,
$C_1 = \left\{x \in A \mid f \ge \frac{2}{3}\right\}$, $B_n = \left\{x \in A \mid f - \sum_{j=1}^{n-1} g_j \le \frac{2^{n-1}}{3^n}\right\}$, $C_n = \left\{x \in A \mid f - \sum_{j=1}^{n-1} g_j \ge \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$.
The sets are closed subsets of A. Since A itself is closed the sets are closed in X. We also have $B_n \cap C_n = \emptyset$. Let $F = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$. We have uniform convergence since per definition $g_n \le \frac{2^{n-1}}{3^n}$. By proposition 4.13, see [Folland,p121], F is continuous.
Since $0 \le f - F \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ for all n, it follows that $F = f$ on A. ■

References

Folland Gerald B., Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, 2nd ed., Wiley-Interscience, 1999.

Wigestrand Jan, A Proof of the Tietze Extension Theorem, Home Project in Advanced Real Analysis, MA3105, NTNU, Trondheim, March 16, 2006, (in Norwegian).
http://www.janwigestrand.com/d/wigestrand_jan_tietze_MA3105.pdf

PROSJEKTOPPGAVE VÅREN 2006

MA 3105

JAN WIGESTRAND
Studentnr:

16.03.2006

Tietze utvidelses sats. La X være et normalt rom. Hvis A er en lukket delmengde av X og $f \in C(A, [a,b])$, så eksisterer det en $F \in C(X, [a,b])$ slik at $F/A = f$

Bevis: Ved å erstatte f med $(f-a)/(b-a)$, kan vi siden fer kontinuerlig på et lukket intervall anta, uten tap av generalitet, at $[a,b] = [0,1]$ $(f=0 \Leftrightarrow f=a,\ f=1 \Leftrightarrow f=b)$

Vil vise at vi kan finne en F ved hjelp av en følge av kontinuerlige funksjoner.
I følge Urysohn's lemma så eksisterer det kontinuerlige funksjoner på formen

$$g_n \in C\left(X, \left[0, \frac{2^{n-1}}{3^n}\right]\right) \text{ der } g_n(B_n) = 0,\ g_n(C_n) = \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

$B_n \cap C_n = \emptyset$ og B_n, C_n er lukkete delmengder av A.

Velger mengdene $B_1, \dots, B_n, C_1, \dots, C_n$ på følgende måte

$$B_1 = \{x \in A \mid f \leq \tfrac{1}{3}\} \quad C_1 = \{x \in A \mid f \geq \tfrac{2}{3}\}$$

$$B_n = \left\{x \in A \;\middle|\; f - \sum_{j=1}^{n-1} g_j \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}\right\} \quad C_n = \left\{x \in A \;\middle|\; f - \sum_{j=1}^{n-1} g_j \geq \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

Mengdene er lukkete delmengder av A. Siden A selv er lukket, så er de lukket i X. Har også at $B_n \cap C_n = \emptyset$

La $F = \sum_1^\infty g_n$. Siden per definisjon $g_n \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}$, har vi uniform konvergens.

I følge prop 4.13 (Folland) så er F kontinuerlig.

Siden $0 \leq f - F \leq (2/3)^n \ \forall n$, følger det at $F = f$ på A.

Tietze utvidelses sats lokalt kompakt versjon

Anta at X er LCH rom og $K \subset X$ er kompakt. Hvis $f \in C(K)$, da eksisterer det en $F \in C(X)$ slik at $F/K = f$.
Videre, F kan velges til å forsvinne utenfor en kompakt mengde.

Bevis: Ved å erstatte f med $(f-a)/(b-a)$, kan vi siden f er kontinuerlig på ett lukket intervall anta, uten tap av generalitet, at $[a,b] = [0,1]$ ($f=0 \Leftrightarrow f=a$, $f=1 \Leftrightarrow f=b$)

Vil vise at vi kan finne en F ved hjelp av en følge av kontinuerlige funksjoner.
La U være en åpen mengde med kompakt tillukning slik at $K \subset U$.
I følge Urysohn's lemma lokalt kompakt versjon så eksisterer det kontinuerlige funksjoner
på formen $g_n \in C\left(X, \left[0, \frac{2^{n-1}}{3^n}\right]\right)$ der $g_n(B_n) = 0$, $g_n(C_n) = \frac{2^{n-1}}{3^n}$

$B_n \cap C_n = \emptyset$ og B_n, C_n er kompakte delmengder av K.
Velger mengdene $B_1, \dots, B_n, C_1, \dots, C_n$ på følgende måte

$$B_1 = \left\{x \in K \mid f \le \tfrac{1}{3}\right\} \quad C_1 = \left\{x \in A \mid f \ge \tfrac{2}{3}\right\}$$

$$B_n = \left\{x \in K \mid f - \sum_{j=1}^{n-1} g_j \le \frac{2^{n-1}}{3^n}\right\} \quad C_n = \left\{x \in K \mid f - \sum_{j=1}^{n-1} g_j \ge \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

La $F = \sum_1^\infty g_n$. Siden per definisjon $g_n \le \frac{2^{n-1}}{3^n}$, har vi uniform konvergens.
I følge prop 4.13 (Folland) så er F kontinuerlig.
Siden $0 \le f - F \le (2/3)^n \ \forall n$, følger det at $F = f$ på K.
Support of F ligger i U, og F kan dermed velges til å forsvinne utenfor en kompakt mengde.